УДК 517.9

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

©Н. Е. Товмасян

1. **Постановка задачи и основные результаты.** В настоящей работе исследуется электромагнитное поле в однородной и изотропной среде, зависящее только от x и времени t и является периодической по t функцией с периодом T. Не ограничивая общности в дальнейшем будем считать, что $T = 2\pi$.

Пусть B_x, B_y, B_z и E_x, E_y, E_z - компоненты магнитной индукции $\vec{B}$ и электрической напряженности $\vec{E}$. Пусть далее ϵ и μ - электрическая и магнитная проницаемость, σ - электропроводимость среды, ϵ_0 и μ_0 - электрическая и магнитная постоянные.

В случае, когда электрическое поле зависит только от x и t, система уравнений Максвелла записывается в следующем виде (см. [1], гл. III):

$$\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial t} = -\beta\, E_x(x,t), \quad \frac{\partial B_x(x,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial B_x(x,t)}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t} = \alpha\, \frac{\partial B_y(x,t)}{\partial x} - \beta\, E_z(x,t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} = -\alpha\, \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} - \beta\, E_y(x,t), \tag{3}$$

где $\alpha = \frac{1}{\epsilon\,\epsilon_0\,\mu\,\mu_0}$, $\beta = \frac{\sigma}{\epsilon\,\epsilon_0}$.

Системы уравнений (1), (2) и (3) рассматриваем в области $R^2_+ = \{(x,t);\, x > 0,\ t \in (-\infty, +\infty)\}$. Исходя из физических соображений решения этих систем будем искать в классе ограниченных функций. Периодическое по t решение системы (1) определяется формулой:

$$B_y(x,t) \equiv \text{const}, \quad E_z(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in R^2_+.$$

Системы (2) и (3) в указанном классе имеют бесконечное число линейно независимых решений. В данной работе указываются граничные условия, которые определяют решения этих систем однозначно или с точностью до конечного числа линейно независимых решений. Мы будем исследовать граничные задачи для системы (2). Система (3) исследуется аналогично.

Граничные условия для системы (2) берем в виде:

$$a(t)\, B_y(0,t) + b(t)\, E_z(0,t) = f(t), \tag{4}$$

где $a(t)$, $\beta(t)$ и $f(t)$ -заданные вещественные бесконечно дифференцируемые функции с периодом 2π. Решение ищется в классе ограниченных, бесконечно дифференцируемых периодических по переменной t функций с периодом 2π. Задачу (2), (4) при $f \equiv 0$ будем называть однородной.
В работе получены следующие результаты:

Теорема 1. *Если $a(t) - \sqrt{\alpha}\, b(t) \neq 0$ при $t \in (-\infty, \infty)$, то задача (2), (4) фредгольмова.*

Теорема 2. *Если $\alpha(t) \equiv const \neq 0$ и $b(t) \equiv const$, то задача (2), (4) однозначно разрешима. Если же $\alpha(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv const \neq 0$, то однородная задача (2), (4) имеет одно линейно независимое решение: $B_y(x,t) \equiv const$, $E_z(x,t) \equiv 0$, а соответствующая неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0. \tag{5}$$

Под однозначной разрешимостью задачи (2), (4) подразумевается существование и единственность решения этой задачи.

Исследуются также краевые задачи для системы уравнений Максвелла, когда среда состоит из двух различных однородных слоев.

2. **Исследование задачи (2), (4).**

Доказательство теоремы 1. Пусть $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ - бесконечно дифференцируемое по x и t и периодическое по t (с периодом 2π) вещественное решение системы (2). Тогда это решение разлагается в ряд Фурье по t:

$$B_y(x,t) = U_0(x) + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)e^{int}, \quad x \geq 0, \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{6}$$

$$E_z(x,t) = V_0(x) + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)e^{int}, \quad x \geq 0, \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{7}$$

где i - мнимая единица, а $U_n(x)$ и $V_n(x)$ - коэффициенты Фурье этих решений:

$$U_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_y(x,\tau)e^{-ni\tau}d\tau, \quad V_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E_z(x,\tau)e^{-ni\tau}d\tau, \tag{8}$$
$$(n = 0, 1, \ldots).$$

Из формулы (8) следует, что при $x \geq 0$ функции $U_n(x)$ и $V_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ ограничены, причем $U_0(x)$ и $V_0(x)$ - вещественные.

Так как $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ удовлетворяют системе (2), то из (8) следует, что $U_n(x)$ и $V_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dU_n(x)}{dx} = \frac{ni+\beta}{a}V_n(x), \quad \frac{dV_n(x)}{dx} = inU_n(x), \quad x > 0. \tag{9}$$

Систему (9) можно получить также, если мы $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ из (6) и (7) подставим в систему (2).

Общее решение системы (9) в классе ограниченных функций определяется формулой:

$$U_0(x) = c_0, \quad V_0(x) = 0, \tag{10}$$

$$U_n(x) = c_n \exp(\lambda_n x), \quad V_n(x) = c_n \frac{a\,\lambda_n}{\beta + in}\exp(\lambda_n x), \tag{11}$$

$n = 1, 2, \ldots$, где c_n $(n = 0, 1, \ldots)$ - произвольные постоянные, c_0 - вещественная,

$$\lambda_n = -\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{-n + i\beta} = -a_n - ib_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

$$a_n = \frac{\beta}{\sqrt{2\alpha}\sqrt{1+\beta^2 n^{-2}}}, \quad b_n = \frac{n}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{\sqrt{1+\beta^2 n^{-2}} + 1}. \tag{13}$$

Из (8) и (11) имеем

$$c_n = U_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B_y(0,\tau)\, e^{-ni\tau}\, d\tau, \quad n = 0, 1, \dots \tag{14}$$

Подставляя $U_n(x)$ и $V_n(x)$ из (10) и (11) в (6) и (7) при $x = 0$ получим:

$$B_y(0,t) = c_0 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad E_z(0,t) = 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\alpha\,\lambda_n\, z^n}{\beta + in}, \tag{15}$$

где $z = e^{it}$.

Обозначим через $\phi(z)$ аналитическую в круге $D = \{z : \ |z| < 1\}$ функцию

$$\phi(z) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{16}$$

где постоянные c_n определяются формулой (14). Так как $B_y(0,t)$ бесконечно дифференцируемая функция, то $\phi(z)$ также бесконечно дифференцируемая в $\overline{D}$.

Как известно коэффициенты c_n в (16) определяются через $\phi(z)$ по формуле [2]

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\phi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta}, \quad c_n = \frac{1}{4\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\phi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}. \tag{17}$$

Обозначим

$$\delta_n = \frac{\alpha\lambda_n}{in+\beta} + \sqrt{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha}\,\beta i}{2(n+1)}. \tag{18}$$

Из (12) следует справедливость следующей оценки:

$$|\delta_n| \le \frac{c}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{19}$$

где постоянная c не зависит от n.

Из (16) и (18) имеем

$$2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\alpha\,\lambda_n\, z^n}{\beta + in} = -\sqrt{\alpha}\phi(z) - \frac{\alpha\,\beta\, i}{2z}\int_0^z \phi(\zeta)\, d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta_n c_n z^n + \\ + \sqrt{\alpha}\, c_0 + \frac{c_0\sqrt{\alpha}\,\beta}{2}\, i. \tag{20}$$

Подставляя c_n из (17) в правую часть (20) получим

$$2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\alpha\,\lambda_n\, z^n}{\beta + in} = -\sqrt{\alpha}\,\phi(z) + K(\phi), \tag{21}$$

где

$$K(\phi) = -\frac{\sqrt{\alpha}\beta i}{2z}\int_0^z \phi(\zeta)\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} M(z,\zeta)\,\phi(\zeta)\, d\zeta, \tag{22}$$

$$M(z,\zeta) = \sqrt{\alpha}\,(1 + \frac{i\beta}{2})\,\frac{1}{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n z^n}{\zeta^{n+1}}, \quad |z| \le 1, \quad |\zeta| = 1. \tag{23}$$

Из (18) следует, что функция $M(z,\zeta)$ аналитична по z в D и удовлетворяет условию Гельдера по z и ζ при $|z| \le 1$, $|\zeta| = 1$.

Оператор K сопоставляет каждой аналитической в $B(0,1)$ функции $\phi(z)$ аналитическую в той же области функцию $K(\phi)$, причем если $\phi(z)$ m раз непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$, то $K(\phi)$ $m+1$ раз непрерывно дифференцируема в том же замкнутом круге.

Подставляя $B_y(0,t)$ и $E_z(0,t)$ из (15) в граничное условие (4) и имея в виду (16) и (21), получим

$$\mathrm{Re}\left[(A_1(z)-\sqrt{\alpha}\,A_2(z))\,\phi(z)+B(z)\,K(\phi)\right]=f_1(z),\quad |z|=1, \tag{24}$$

где

$$A_1(z)=a\,(\arg z),\quad A_2(z)=b\,(\arg z),\quad f_1(z)=f\,(\arg z). \tag{25}$$

Поделив обе части (24) на $A_1(z)-\sqrt{\alpha}\,A_2(z)\neq 0$, получим

$$\mathrm{Re}\,(\phi(z)+K_1(\phi))=f_2(z),\quad |z|=1, \tag{26}$$

где

$$K_1(\phi)=\frac{A_2(z)}{A_1(z)-\sqrt{\alpha}\,A_2(z)}\,K(\phi),\quad f_2(z)=\frac{f_1(z)}{A_1(z)-\sqrt{\alpha}\,A_2(z)}.$$

Из (16) имеем

$$\mathrm{Im}\,\phi(0)=0. \tag{27}$$

Таким образом, для определения аналитической функции $\phi(z)$ мы получили краевую задачу (26) с дополнительным условием (27). Эта задача является частным случаем известной задачи Римана, которая подробно исследована в монографии [3], откуда следует ее фредгольмовость. Подставляя решение $\phi(z)$ задачи (26), (27) в (17) мы находим постоянные c_k ($k=0,1,\ldots$). Отсюда и из формул (6), (7), (10), (11) мы получим решение задачи (2), (4). Так как задача (26), (27) фредгольмова, то задача (2), (4) также фредгольмова. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(t)$ - вещественная, бесконечно дифференцируемая и периодическая функция с периодом 2π и пусть

$$f(t)=A_0+2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,e^{int} \tag{28}$$

ряд Фурье функции $f(t)$, где

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,e^{-int}\,dt,\quad n=0,1,\ldots \tag{29}$$

Граничное условие берем в виде

$$B_y(0,t)=b\,E_z(0,t)+f(t), \tag{30}$$

где b -вещественная постоянная.

Подставляя $B_y(0,t)$, $E_z(0,t)$ и $f(t)$ из (15) и (28) в граничное условие (30), получим

$$c_0=A_0, \tag{31}$$

$$\left(1-\frac{\alpha\,b\,\lambda_n}{\beta+in}\right)c_n=A_n. \tag{32}$$

Поскольку $\lambda_n^2=in\,(ni+\beta)\,\alpha^{-1}$, то

$$1-\frac{\alpha\,b\,\lambda_n}{\beta+in}=1-\frac{\alpha\,b\,\lambda_n^2}{(\beta+in)\,\lambda_n}=\frac{\lambda_n-ib_n}{\lambda_n}.$$

Так как $\operatorname{Re}\lambda_n \neq 0$, то $\lambda_n - ibn \neq 0$.

Из (32) имеем

$$c_n = \frac{\lambda_n A_n}{\lambda_n - ibn}. \tag{33}$$

Подставляя c_n из (31) и (33) в (10) и (11), мы получим коэффициенты рядов Фурье (6) и (7). Таким образом, функции $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ определяются однозначно.

Пусть теперь краевое условие имеет вид

$$E_z(0,t) = f(t). \tag{34}$$

Подставляя $E_z(0,t)$ и $f(t)$ из (15) и (28) в граничное условие (34), получим

$$c_n = \frac{A_n(\beta + in)}{\alpha\lambda_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0. \tag{36}$$

Таким образом, условие (5) необходимо и достаточно для разрешимости задачи (2), (34). Решение этой задачи определяется формулами (6) и (7), где функции $U_n(x)$ и $V_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и постоянные c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ определяются из соотношений (10), (11) и (35), а c_0 - произвольная вещественная постоянная. Отсюда, в частности, следует, что однородная задача (2), (34) имеет одно линейно независимое решение $B_y(x,t) \equiv \mathrm{const}$, $E_z(x,t) = 0$. Теорема 2 доказана.

3. **Краевые задачи для уравнения Максвелла в средах, состоящих из двух однородных слоев.**

Пусть среда состоит из двух слоев: $0 \leq x \leq x_0$ и $x_0 \leq x \leq \infty$. Тогда в уравнении (2) коэффициенты α и β кусочно постоянные:

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \text{при} \quad 0 \leq x < x_0, \tag{37}$$

$$\alpha = \alpha_2, \quad \beta = \beta_2, \quad \text{при} \quad x > x_0, \tag{38}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - некоторые положительные постоянные.

Исходя из физических соображений предполагаем, что 1) решения B_y и E_z удовлетворяют уравнению (2) в областях $0 < x < x_0$, $-\infty < t < \infty$ и $x > x_0$, $-\infty < t < \infty$; 2) B_y и E_z ограничены и непрерывны в $\overline{R^2_+}$; 3) B_y и E_z дважды непрерывно дифференцируемы в областях $0 < x < x_0$, $t \in (-\infty, \infty)$ и $x > x_0$, $t \in (-\infty, \infty)$.

Граничное условие берем в виде

$$B_y(0,t) = K\,E_z(0,t) + f(t), \tag{39}$$

где K - некоторое положительное число, а $f(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в условии (4).

Здесь также решение ищется в классе периодических по t функций, с периодом 2π.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Задача (2), (39) однозначно разрешима.*

Доказательство. Пусть

$$f(t) = A_n\,e^{int}, \tag{40}$$

где A_n - комплексная постоянная, n - натуральное число. Решение задачи (2), (39) при таком $f(t)$ ищем в виде

$$B_y(x,t) = U_n(x)\,e^{int}, \quad E_z(x,t) = V_n(x)\,e^{int}. \tag{41}$$

Подставляя $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ из (41) в уравнение (2) и используя (37) и (38), получим:

$$in\,U_n(x) = \frac{d\,V_n(x)}{dx}, \quad in\,V_n(x) = \alpha_1\,\frac{d\,U_n(x)}{dx} - \beta_1\,V_n(x), \quad 0 < x < x_0, \tag{42}$$

$$in\,U_n(x) = \frac{d\,V_n(x)}{dx}, \quad inV_n(x) = \alpha_2\,\frac{d\,U_n(x)}{dx} - \beta_2\,V_n(x), \quad x > x_0, \tag{43}$$

Подставляя $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ из (41) в граничное условие (39) при $f(t) = A_n \exp(\mathrm{int})$, получим

$$U_n(0) = K\,V_n(0) + A_n. \tag{44}$$

Общее решение системы (42) определяется формулой:

$$V_n(x) = c_{n1}\,e^{\lambda_n x} + c_{n2}\,e^{-\lambda_n x}, \quad U_n(x) = \frac{\lambda_n}{in}\,(c_{n1}\,e^{\lambda_n x} - c_{n2}\,e^{\lambda_n x}), \tag{45}$$

$0 < x < x_0$, где c_{n1} и c_{n2} - произвольные постоянные,

$$\lambda_n = -\sqrt{\frac{n}{\alpha_1}(-n + i\beta_1)}.$$

Общее решение системы (43), ограниченное в области $x > x_0$ определяется формулой:

$$V_n(x) = c_{n3}\,e^{\mu_n x}, \quad U_n(x) = \frac{\mu_n}{in}\,c_{n3}\,e^{\mu_n x}, \quad x > 0, \tag{46}$$

где c_{n3} - произвольная постоянная, $\mu_n = -\sqrt{\frac{n}{\alpha_2}\,(-n + i\,\beta_2)}$.

Подставляя $U_n(x)$ и $V_n(x)$ из (45) в (44), получим

$$\frac{\lambda_n}{in}\,(c_{n1} - c_{n2}) = K\,(c_{n1} + c_{n2}) + A_n. \tag{47}$$

Из непрерывности $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ на линии раздела двух слоев $x = x_0$ следует, что $U_n(x)$ и $V_n(x)$ непрерывны при $x = x_0$.
Поэтому из формул (45) и (46) имеем

$$c_{n1}\exp(\lambda_n\,x_0) + c_{n2}\exp(-\lambda_n\,x_0) = c_{n3}\exp(\mu_n\,x_0), \tag{48}$$

$$\lambda_n\,(c_{n1}\exp(\lambda_n\,x_0) - c_{n2}\exp(-\lambda_n\,x_0)) = \mu_n\exp(\mu_n\,x_0), \tag{49}$$

Легко показать, что при $k \geq 0$ система уравнений (47)-(49) однозначно разрешима относительно c_{n1}, c_{n2} и c_{n3}. Таким образом, можно $B_y(x,t)$, $E_z(x,t)$ по формуле (41) определить однозначно.

Пусть теперь $f(t) = A_0$. Тогда аналогично доказывается, что решение задачи (2), (39) определяется формулой (41), где $n = 0$,

$$U_0(x) = A_0, \quad V_0(x) = 0. \tag{50}$$

Пусть теперь $f(x)$ представляется рядом (28) и пусть $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ - функции, определенные формулами (6) и (7), где $U_n(x)$, $V_n(x)$ и постоянные c_{n1}, c_{n2}, c_{n3} определяются однозначно из соотношений (45)-(48). Тогда легко доказывается, что ряды (6) и (7) можно продифференцировать по x и t почленно и $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ являются решением задачи (2), (39).

Теперь докажем единственность решения этой задачи. Пусть $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ являются решением однородной задачи (2), (39) (при $f(t) \equiv 0$) и пусть $U_n(x)$ и $V_n(x)$ $(n = 0, 1, ...)$ - коэффициенты разложений в ряд Фурье по переменной t функций $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$. Эти коэффициенты определяются формулами (8). Из ограниченности функций $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ следует ограниченность функций $U_n(x,t)$ и $V_n(x,t)$.

Так как $B_y(x,t)$ и $E_z(x,t)$ - решение однородной задачи (2), (39), то легко убедиться, что функции $U_n(x)$ и $V_n(x)$, определенные формулой (8), являются решением задачи (42)-(44) при $A_n = 0$. Выше мы показали , что эта задача в классе ограниченных имеет только нулевое решение. Следовательно однородная задача (2), (39) имеет только нулевое решение. Теорема 3 доказана.

Приведенные в этой работе результаты остаются в силе, если $f(t)$ дважды дифференцируемая и периодическая функция.

1. *Н.Е.Товмасян* , Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и применение в электродинамике. - Сингапур, 1993.

2. *М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат* , Методы теории функций комплексного переменного. - М. : Наука, 1973.

3. *И.И.Мусхелишвили* , Сингулярные интегральные уравнения. - Москва, 1962.